Révisions & Oraux ; Série N°10

Exercice 1 Soient $p \geq 2$ et $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z_1 + \cdots + z_p| = |z_1| + \cdots + |z_p|$. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$.

Exercice 2 On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules, numérotées de 1 à n. On répète l'expérience suivante jusqu'à ce que l'urne soit vide. : a. on tire une boule de l'urne de numéro k. b. on retire de l'urne toutes les boules de numéros supérieurs (ou égaux) à k, On note N_n la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Déterminer la loi de N_3.
2. Montrer que pour $n \geq 2$ et $k \geq 1$, $\mathbf{P}(N_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(N_{i-1} = k - 1)$.
3. On considère des variables $Y_1, \ldots, Y_n$ indépendantes, où Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On note $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   a) Montrer que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad \mathbf{P}(Z_n = k) = \dfrac{n-1}{n} \mathbf{P}(Z_{n-1} = k) + \dfrac{1}{n} \mathbf{P}(Z_n = k - 1)$.
   b) En déduire $\mathbf{E}(N_n)$ et $\mathbf{V}(N_n)$.
4. Montrer que $\mathbf{P}\big(|N_n - \ln n| > \varepsilon \ln n\big) \to 0$.

Exercice 3 [Mines MP 2024] On pose $D =]0,1[^2$ et l'on définit f sur D par : $\forall (x,y) \in D, f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. En étudiant la restriction de f à $K = \left\{(x,y) \in D \;;\; (x,y) \in \left[0, \frac{7}{9}\right] \text{ et } x + y \geq \frac{2}{9}\right\}$ déterminer les extrema globaux de f.

Exercice 4 [Mines MP 2024] Soit (E) l'équation différentielle $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Résoudre (E) en posant $t = \ln x$.
2. Résoudre $x^2y'' + xy' + y = \sin(a \ln x)$.

Exercice 5 [ENS MP 2024] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme (bijectif continue, de réciproque continue). Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$,

$$L_f(x,r) = \sup \left\{\|f(x) - f(y)\| \;;\; y \in \mathbb{R}^2,\ \|x - y\| \leq r\right\} \quad \text{et} \quad \ell_f(x,r) = \inf \left\{\|f(x) - f(y)\| \;;\; y \in \mathbb{R}^2,\ \|x - y\| \geq r\right\}.$$

1. Montrer que $L_f(x,r) = \sup \left\{\|f(x) - f(y)\| \;;\; y \in \mathbb{R}^2,\ \|x-y\| = r\right\}$, et $\ell_f(x,r) = \inf \left\{\|f(x)-f(y)\| \;;\; y \in \mathbb{R}^2,\ \|x-y\| = r\right\}$.
2. Pour x fixé, montrer que $r \mapsto L_f(x,r)$ et $r \mapsto \ell_f(x,r)$ sont croissantes.

On dit que f est quasi-conforme s'il existe $K_f > 0$ tel que : $\forall (x,r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*},\ L_f(x,r) \leq K_f \ell_f(x,r)$.

3. On suppose f quasi-conforme. Montrer qu'alors $L_f(x, 2r) \leq (1 + K_f) L_f(x,r)$.
4. Montrer que f est quasi-conforme si et seulement si f^{-1} est quasi-conforme.

Révisions & Oraux ; Série N°10

Exercice 1 Soient $p \geq 2$ et $z_1, \ldots, z_p \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z_1 + \cdots + z_p| = |z_1| + \cdots + |z_p|$. Montrer que pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $z_k = \lambda_k z_1$.

Exercice 2 On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules, numérotées de 1 à n. On répète l'expérience suivante jusqu'à ce que l'urne soit vide. : a. on tire une boule de l'urne de numéro k. b. on retire de l'urne toutes les boules de numéros supérieurs (ou égaux) à k, On note N_n la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Déterminer la loi de N_3.
2. Montrer que pour $n \geq 2$ et $k \geq 1$, $\mathbf{P}(N_n = k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(N_{i-1} = k - 1)$.
3. On considère des variables $Y_1, \ldots, Y_n$ indépendantes, où Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On note $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.
   a) Montrer que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad \mathbf{P}(Z_n = k) = \dfrac{n-1}{n} \mathbf{P}(Z_{n-1} = k) + \dfrac{1}{n} \mathbf{P}(Z_n = k - 1)$.
   b) En déduire $\mathbf{E}(N_n)$ et $\mathbf{V}(N_n)$.
4. Montrer que $\mathbf{P}\big(|N_n - \ln n| > \varepsilon \ln n\big) \to 0$.

Exercice 3 [Mines MP 2024] On pose $D =]0,1[^2$ et l'on définit f sur D par : $\forall (x,y) \in D, f(x,y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. En étudiant la restriction de f à $K = \left\{(x,y) \in D \;;\; (x,y) \in \left[0, \frac{7}{9}\right] \text{ et } x + y \geq \frac{2}{9}\right\}$ déterminer les extrema globaux de f.

Exercice 4 [Mines MP 2024] Soit (E) l'équation différentielle $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Résoudre (E) en posant $t = \ln x$.
2. Résoudre $x^2y'' + xy' + y = \sin(a \ln x)$.

Exercice 5 [ENS MP 2024] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un homéomorphisme (bijectif continue, de réciproque continue). Pour $x \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$,

$$L_f(x,r) = \sup \left\{\|f(x) - f(y)\| \;;\; y \in \mathbb{R}^2,\ \|x - y\| \leq r\right\} \quad \text{et} \quad \ell_f(x,r) = \inf \left\{\|f(x) - f(y)\| \;;\; y \in \mathbb{R}^2,\ \|x - y\| \geq r\right\}.$$

1. Montrer que $L_f(x,r) = \sup \left\{\|f(x) - f(y)\| \;;\; y \in \mathbb{R}^2,\ \|x-y\| = r\right\}$, et $\ell_f(x,r) = \inf \left\{\|f(x)-f(y)\| \;;\; y \in \mathbb{R}^2,\ \|x-y\| = r\right\}$.
2. Pour x fixé, montrer que $r \mapsto L_f(x,r)$ et $r \mapsto \ell_f(x,r)$ sont croissantes.

On dit que f est quasi-conforme s'il existe $K_f > 0$ tel que : $\forall (x,r) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{+*},\ L_f(x,r) \leq K_f \ell_f(x,r)$.

3. On suppose f quasi-conforme. Montrer qu'alors $L_f(x, 2r) \leq (1 + K_f) L_f(x,r)$.
4. Montrer que f est quasi-conforme si et seulement si f^{-1} est quasi-conforme.